سری دوم تمرین‌های ریاضی ۲

۲۱ اسفند ۱۳۹۶

تمرین‌های برگزیده

تمرین ۱: دستگاه‌های معادلات خطی زیر را حل کنید و فضای جواب را به صورت یک مجموعه بنویسید.

۱.
$$\begin{cases} 2x + 2y - z + w = 10 \\ x + 4z - 3w = -15 \\ -3x - 2y - 3z + 2w = 5 \end{cases}$$

۲.
$$\begin{cases} x + y + 2z = -3 \\ 2x - y + z = -3 \\ -x - y - z = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

تمرین ۲: فرض کنید $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ یک تبدیل خطی با ماتریس نمایش زیر در پایه استاندارد باشد:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

۱. فضای پوچ این تبدیل خطی را بدست آورید.

۲. این فضای برداری چندبعدی است؟

۳. بعد فضای تصویر T را بدست آورید.

تمرین ۳: تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ به صورت زیر داده شده است:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2 + x_3, 3x_1 + 2x_3 + x_4, x_1 - x_2 + x_3 + x_4)$$

نمایش ماتریسی تبدیل خطی T را نسبت به پایه‌های استاندارد $\mathbb{R}^4$ و $\mathbb{R}^3$ بنویسید.

تمرین ۴: یک پایه متعامد یکه برای فضای جواب ابرصفحه $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$ ارائه دهید.

تمرین ۵: فرض کنید $E \subseteq \mathbb{R}^5$ زیر فضای تولید شده توسط بردارهای زیر باشد:

$$(0,3,0,0,4),(2,0,3,0,-1),(0,0,-1,0,0)$$

یک پایه متعامد یکه برای این زیرفضا بسازید.

تمرین ۶: مقداروِیژه و بردارهای ویژه ماتریس‌های زیر را بدست آورید.

۱. $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

۲. $B = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

تمرین ۷: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد که k مقدار ویژه دوبه‌دو متمایز دارد؛ مثلا $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$. اگر u_i یک بردار ویژه متناظر با λ_i باشد $(1 \leq i \leq k)$، نشان دهید $\{u_1, \cdots u_k\}$ یک زیرمجموعه مستقل خطی از $\mathbb{R}^n$ است.

تمرین ۸: فرض کنید A یک ماتریس متقارن و λ و μ دو مقداروِیژه متمایز آن باشد. اگر u یک بردارویژه λ و v یک بردارویژه μ باشد نشان دهید $u \cdot v = 0$.

تمرین ۹: فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد به طوری که $A^t A = 0$. نشان دهید $A = 0$.

تمرین ۱۰: فرض کنید $A_1, \cdots, A_m$ ماتریس‌هایی متقارن باشند به طوری که $A_1^2 + \cdots + A_m^2 = 0$. نشان دهید $A_1 = \cdots = A_m = 0$.

تمرین ۱۱: فرض کنید A یک ماتریس پوچ‌توان باشد؛ یعنی عدد طبیعی k موجود باشد که $A^k = 0$. نشان دهید $I + A$ وارون‌پذیر است.

نمونه سوال‌های امتحانی

سوال ۱ (نیم‌سال دوم ۸۸–۸۷): سه بردار $OA = (1,0,0), OB = (0,1,0), OC = (1,-1,1)$ را در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید.

۱. حجم متوازی السطوحی که با بردارهای فوق تولید می‌شود را محاسبه کنید.

۲. مساحت متوازی‌الاضلاعی که با دو بردار OB, OC تولید می‌شود را محاسبه کنید.

سوال ۲ (نیم‌سال دوم ۸۹–۸۸): فرض کنید

$$A = (1,1,1,1), u = (1,0,2,1), v = (0,1,-2,1), E =< u, v >$$

۱. معادله خطی را بیابید که از نقطه A می‌گذرد و بر فضای E عمود است.

۲. کمترین فاصله نقطه A از صفحه E چقدر است؟

سوال ۳ (نیم‌سال دوم ۹۶-۹۵): فرض کنید بردارهای $(1,1,1)$، $(1,0,-1)$ و $(1,-1,0)$ از $\mathbb{R}^3$، بردارهای ویژه ماتریس $B = \begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}$ باشند. مقادیر a، b، c، d، e و f را محاسبه کنید.